

\mathbb{R} को A अनि B उपसेटहरू भए, जसमा A चाहे closed अनि B compact भए, $A \cap B$ compact हुन्छ भनी प्रमाण गर।

GROUP-B / विभाग-ख / समूह-ख

2. Answer any **four** questions from the following:

6×4 = 24

निम्नलिखित ये-कौनो चारै प्रश्नर उत्तर दाओः

कुनै चार प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) If K be a subset of \mathbb{R} such that every infinite subset of K has a limit point in K then K is compact. 6

यदि $K \subseteq \mathbb{R}$ एमन ये प्रत्येकटि असैम K -एर उपसेटकुलिर एकटि limit बिन्दु आहे K -ते, तबे प्रमाण करौ ये K compact ।

K को हरेक अनन्त उप-सेटको सीमा बिन्दु (limit point) K भित्र नै भए अनि $K \subseteq \mathbb{R}$ भए, K compact हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Prove that every bounded sequence of real numbers has a convergent subsequence. 6

प्रमाण करौ ये, प्रत्येकटि सीमाबद्ध वास्तव संख्यार अनुक्रमेर एकटि अभिसारी उपअनुक्रम থাকबे।

वास्तविक संख्याहरूको हरेक bounded अनुक्रमको एउटा अभिकेन्द्रित उप-अनुक्रम पाइन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) If $\sum u_n$ be a series of positive real numbers and $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, then prove that 6

$\sum u_n$ is convergent if $l < 1$ and divergent if $l > 1$.

यदि $\sum u_n$ एकटि धनात्मक वास्तव संख्यार श्रेणी हय, एवं $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ तबे प्रमाण करौ ये $\sum u_n$

अभिसारी हबे यदि $l < 1$ एवं अपसारी हबे यदि $l > 1$ ।

$\sum u_n$ एउटा धनात्मक वास्तविक संख्याहरूको श्रेणीक्रम हो अनि $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ हो ।

प्रमाण गर : $l < 1$ भए $\sum u_n$ अभिकेन्द्रित हुन्छ अनि $l > 1$ भए $\sum u_n$ divergent हुन्छ ।

(d) State and prove nested interval theorem. 6

Nested interval उपपाद्यटि प्रमाण करौ।

Nested Interval उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(e) (i) Show that the sequence $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ is a monotone increasing sequence, bounded above. 3

देखाओ ये, $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ अनुक्रमटि एकटि monotone increasing अनुक्रम एवं bounded above ।

अनुक्रम $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ monotone, increasing अनि bounded above हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Find $\overline{\lim} u_n$ and $\underline{\lim} u_n$ where $u_n = \frac{n}{4} - \left[\frac{n}{4} \right]$. 3

यदि $u_n = \frac{n}{4} - \left[\frac{n}{4} \right]$ हय, तबे $\overline{\lim} u_n$ एवं $\underline{\lim} u_n$ निर्णय करौ।

$u_n = \frac{n}{4} - \left[\frac{n}{4} \right]$ भए $\underline{\lim} u_n$ अनि $\overline{\lim} u_n$ का मानहरू निर्णय गर।

(f) (i) Give an example of a convergent series $\sum a_n$ such that the series $\sum a_{3n}$ is divergent. 3

एमन एकटि अभिसारी श्रेणी $\sum a_n$ एर उदाहरण दाओ याते $\sum a_{3n}$ श्रेणीटि अपसारी हय।