(ii) Find the $\limsup_{n\to\infty} A_n$ and $\liminf_{n\to\infty} A_n$, where $A_n = (1+\frac{1}{n})\cos n\pi$. 2

$\limsup_{n\to\infty} A_n$ and $\liminf_{n\to\infty} A_n$ নির্ণয় করো যদি $A_n = (1+\frac{1}{n})\cos n\pi$ হয়।

$A_n = (1+\frac{1}{n})\cos n\pi$ भए, $\limsup_{n\to\infty} A_n$ अनि $\liminf_{n\to\infty} A_n$ को मान निर्णय गर।

(iii) Let K be a compact subset of $\mathbb{R}$ and $F \subset K$ be a closed subset in $\mathbb{R}$. Prove that F is compact in $\mathbb{R}$. 6

ধরি, K একটি $\mathbb{R}$-এর compact উপসেট এবং $F \subset K$ একটি closed উপসেট $\mathbb{R}$-এর, তবে প্রমাণ করো যে F $\mathbb{R}$-এ compact হবে।

$\mathbb{R}$ को K एउटा compact उपसेट हो अनि K को F एउटा closed उपसेट हो भने F compact हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) (i) For every real $x > 0$ and every integer $n > 0$ there is one and only one positive real y such that $y^n = x$. 6

প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা $x > 0$ এবং প্রত্যেকটি পূর্ণ সংখ্যা $n > 0$ এর জন্য এক এবং একটি ধনাত্মক বাস্তব y থাকবে যাতে করে $y^n = x$ হয়।

वास्तविक $x > 0$ अनि पूर्णसंख्या $n > 0$ को निम्ति $y^n = x$ पूर्ति गर्ने एउटा मात्र धनात्मक पूर्णसंख्या y पाईन्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Let $\sum u_n$ be a convergent series of positive real numbers. Then any rearrangement of $\sum u_n$ is convergent and the sum remains unaltered. 6

ধরি $\sum u_n$ একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার অভিসারী শ্রেণী। তবে $\sum u_n$ -এর যে-কোনো একটি পূর্ণবিন্যাস ও অভিসারী হবে এবং যোগফলটি অপরিবর্তিত থাকবে।

$\sum u_n$ एउटा धनात्मक वास्तविक संख्याहरूको अभिकेन्द्रित् श्रेणीक्रम हो। कुनै पनि पूनर्व्यवस्था (rearrangement) मा $\sum u_n$ अभिकेन्द्रित् रहन्छ साथै मान पनि स्थिर रहन्छ भनी प्रमाण गर।

(d) (i) Prove that the Cartesian Product of two enumerable set is enumerable. 4

প্রমাণ করো যে দুটি enumerable সেটের কার্তেশীয় গুণফল একটি enumerable সেট হবে।

दुईवटा enumerable सेटहरूको cartesian गुणनफल enumerable नै हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Prove that the sequence $\{u_n\}$ where $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ and $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$, for all $n \geq 1$ is a Cauchy sequence. 4

প্রমাণ করো যে একটি অনুক্রম $\{u_n\}$ যেখানে $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ এবং $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$, $\forall\, n \geq 1$ একটি Cauchy অনুক্রম হবে।

यदि $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ अनि $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$ $\forall n \geq 1$ भए $\{u_n\}$ एउटा cauchy अनुक्रम हो भनी प्रमाण गर।

(iii) Prove that the series given by $1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) - \cdots\cdots$ is convergent. 4

প্রমাণ করো যে, একটি শ্রেণী এমন যে $1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) - \cdots\cdots$ অভিসারী হবে।

श्रेणीक्रम $1 - \frac{1}{2}(1+\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}) - \cdots\cdots$ अभिकेन्द्रित् हुन्छ भनी प्रमाण गर।

——×——